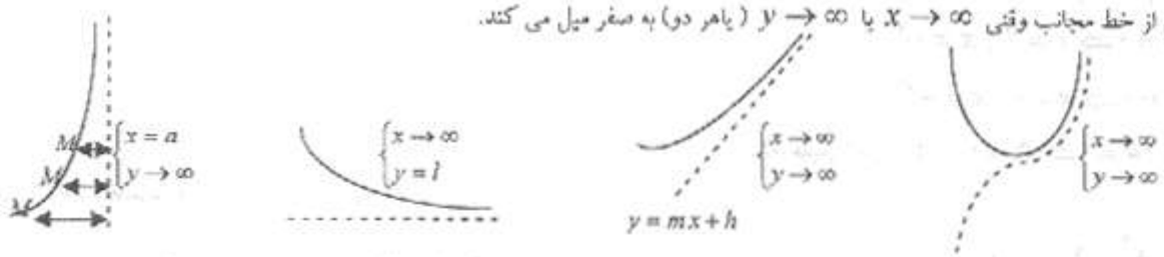
مجانب‌ها

خط مجانب خطی است که فاصله ی آن از نمودار تابع در بی نهایت دور بسیار کم شده، به صفر میل می کند. به عبارت دیگر اگر M نقطه ای از منحنی باشد فاصله آن از خط مجانب وقتی $x \to \infty$ یا $y \to \infty$ (یاهر دو) به صفر میل می کند.



خط مجانب قائم — خط مجانب افقی — خط مجانب مایل — منحنی مجانب

مجانب قائم

مجانب قائم: خطی است قائم که فاصله ای آن با نمودار تابع در بی نهایت به صفر میل می کند.

خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار f گویند هر گاه حد چپ و یا حد راست تابع وقتی $x \to a$ برابر ∞ شود. مجانب قائم عموماً در توابع کسری وجود داردو برای پیدا کردن آن کافیست مخرج کسر را مساوی صفر قراردهیم.

توجه: مجانب قائم در دامنه تابع نیست اما باید همسایگی چپ یا راست آن در دامنه باشد.

نکته: برای پیدا کردن مجانب قائم در توابع لگاریتمی صورت و مخرج عبارت جلوی لگاریتم را مساوی صفر قرار دهیم.

مثال: مجانب قائم توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

۱) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4} \to x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ دو مجانب قائم دارد.

۲) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4} \to x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = +2$ مجانب قائم است. $\left(\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq \infty\right)$

۳) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \to x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$ غ ق ق مجانب قائم ندارد $\left(\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq \infty\right)$

۴) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} \to x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \to \begin{cases} x = 1 \to y = \dfrac{0}{0} & \text{غ ق ق} \\ x = 2 \to y = \dfrac{2}{0} & \text{ق ق} \end{cases}$

۵) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \to x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = +1$ مجانب قائم است

چون $x = -1$ زیر رادیکال قرار نمی گیرد به عبارت بهتر حدود $x = -1$ در دامنه وجود ندارد پس غیر قابل قبول است.

۶) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \to \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = +2 & \text{ق ق} \\ x = 0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۷) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \to \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \to x = \pm 1 & \text{غ ق ق} \\ x^2 - 4 = 0 \to x = \pm 2 & \text{ق ق} \end{cases} \quad D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

۸) $f(x) = \tan x \quad [0, 2\pi]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \to \cos x = 0 \to \left\{ x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \right.$ مجانب های قائم

۹) $f(x) = \dfrac{\tan x}{2\sin x - 1} \quad [0, 2\pi]$

$$\frac{\tan x}{2\sin x - 1} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2\sin x - 1} = \frac{\sin x}{\cos x(2\sin x - 1)} \to \begin{cases} \cos x = 0 \to x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \\ 2\sin x - 1 = 0 \to \sin x = \dfrac{1}{2} \to x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

پس منحنی ۴ مجانب قائم دارد.

$$10)\ f(x)=\frac{1}{|x-2|-5}+\frac{5}{x^3+4x^2}+\frac{7x+5}{x^2-2x+15}$$

$$\begin{cases}|x-2|-5=0 \Rightarrow x=7\ ,\ x=-3\\ x^3+4x^2=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-4\\ x^2-2x+15=0 \Rightarrow \Delta<0 \ \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}\end{cases}$$

پس منحنی ۴ مجانب قائم دارد.

$$11)\ f(x)=\frac{x^3+x}{x^2-|x|} \Rightarrow x^2-|x|=0$$

$$x^2-|x|=0 \Rightarrow |x|\left(|x|-1\right)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-1\ ,\ x=1$$

$x=0$ صورت را صفر می کند و داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^3+x}{x^2-|x|}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3+x}{x^2-|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\left(x^2+1\right)}{x\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{x-1}=-1\end{cases}$$

در $x=0$ حدهای چپ و راست بی نهایت نشده است پس $x=0$ مجانب قائم نیست. بنابراین تابع دارای دو مجانب قائم $x=-1$ و $x=1$ است.

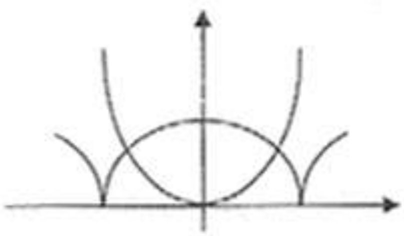
$$12)\ f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

به نظر می رسد $x=0$ مجانب قائم این منحنی است اما چون $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ پس $x=0$ مجانب قائم نمی باشد.

☑**تست۱:** منحنی $y=\frac{1}{x^2-|\cos x|}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

$$x^2-|\cos x|=0 \Rightarrow x^2=|\cos x|$$



پاسخ: گزینه۳ تعداد ریشه های معادله (مخرج کسر) برابر است با تعداد نقاط تلاقی دو تابع $\begin{cases}y=x^2\\ y=|\cos x|\end{cases}$ و با توجه به نمودار، مخرج دو ریشه و تابع دو مجانب قائم دارد.

☑**تست۲:** منحنی $y=Arc\sin\frac{1}{x-2}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه۱ تابع $Arc\sin u$ کراندار است لذا به ازای هیچ مقداری از x, y به ∞ نمی رود و تابع فاقد مجانب قائم است.

☑**تست۳:** منحنی $y=\log\frac{1-x}{1+x}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی شمار

پاسخ: گزینه۳ صورت ومخرج را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$1-x=0 \Rightarrow x=1\ ,\ \lim_{x\to 1^-}\log\frac{1-x}{1+x}=\log\left(0^+\right)=-\infty$$

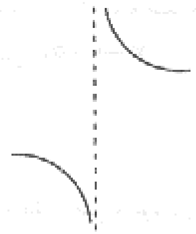
$$1+x=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ \lim_{x\to(-1)^+}\log\frac{1-x}{1+x}=\log\frac{2}{0^+}=\log(+\infty)=+\infty$$

بنابراین خطوط $x=1$, $x=-1$ مجانب های قائم تابع هستند.

مثال۱۳: نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را در نزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.

مخرج: مجانب قائم $=0 \to x=0$ ریشه ساده

$$\begin{cases} x \to 0^+ = y = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ x \to 0^- = y = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

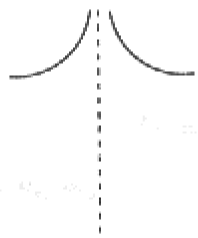


این نوع انفصال را **انفصال ساده** می نامند.(مخرج ریشه ساده دارد)

مثال۱۴: نمودار تابع $y=\frac{1}{x^2}$ را در نزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.

مخرج: قائم $=0 \to x^2=0$ ریشه مضاعف(دو ریشه برابر)

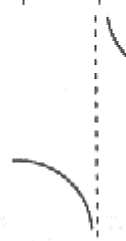
$$\begin{cases} x \to 0^+ = y = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ x \to 0^- = y = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$



این نوع انفصال را **انفصال مضاعف** می نامند.(مخرج ریشه مضاعف دارد)

مثال۱۵: نمودار تابع $y=\frac{x+2}{x^5+x}$ را در نزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.

مخرج: قائم $=0 \to \begin{cases} x=0 & \text{ریشه ساده} \Rightarrow \text{انفصال ساده} \\ x^4+1=0 \to x^4=-1 & \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$

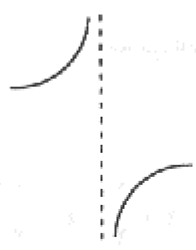


$$x \to 0^+ : y = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$x \to 0^- : y = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

مثال۱۶: نمودار تابع $y=\frac{\sin x}{-1+\cos x}$ در مجاورت $x=0$ رسم کنید.

$$y = \lim_{x\to 0}\frac{x}{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{-2}{x} \Rightarrow \begin{cases} x \to 0^+ : \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ x \to 0^- : \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases}$$



مثال۱۷: نمودار تابع $y=\frac{1}{x-|x|}$ رادرنزدیکی مجانب قائم آن رسم کنید.

$$\begin{cases} x > 0 \to y = \frac{1}{x-x} = \frac{1}{0} & \text{نامعین} \\ x < 0 \to y = \frac{1}{x-(-x)} = \frac{1}{2x} \xrightarrow{x\to 0^-} y = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

مجانب افقی

مجانب افقی: خطی است افقی که فاصله ی آن از نمودار تابع در بی نهایت بسیار کم شده، به صفر میل می کند.
بنابراین خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f گویند هرگاه حد تابع وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ برابر عدد معین L شود. پس برای پیدا کردن مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ را می یابیم.

توجه: در توابع کسری که درجه صورت کوچکتر یا مساوی مخرج است مجانب افقی وجود دارد همچنین در برخی توابع اصم، لگاریتمی و... مجانب افقی داریم.

مثال: مجانب افقی توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

۱) $y=\dfrac{x-۱}{x^۲+۵} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-۱}{x^۲+۵}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۱}{\infty}=۰ \Rightarrow y=۰$ مجانب افقی

۲) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x}=-۱ \Rightarrow y=-۱$

مجانب های افقی

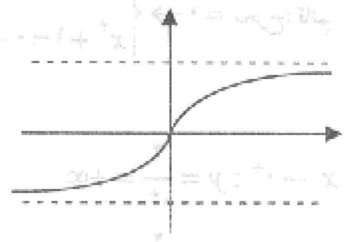
$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=۱ \Rightarrow y=۱$

۳) $y=\dfrac{۴x}{x^۲+۵}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۴x}{x^۲+۵}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۴x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۴}{x}=\dfrac{۴}{\pm\infty}=۰ \Rightarrow y=۰$ مجانب افقی

۴) $y=\dfrac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$

$D_f:[-۱,۱]-\{۰\}$ با توجه به اینکه دامنه محدود است، x به ∞ نمی رود و تابع فاقد مجانب افقی است.

۵) $y=Arc\tan x$

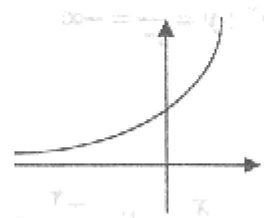


$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\tan x=\dfrac{-\pi}{۲}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\tan x=\dfrac{\pi}{۲}$

$\Rightarrow y=\dfrac{-\pi}{۲},\ y=\dfrac{\pi}{۲}$ مجانب های افقی

۶) $y=۳^x$



$y=\lim\limits_{x\to-\infty} ۳^x=۳^{-\infty}=۰$

$y=\lim\limits_{x\to+\infty} ۳^x=۳^{+\infty}=+\infty$

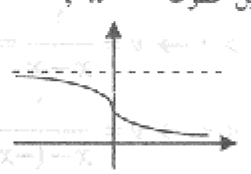
$\Rightarrow y=۰$ مجانب افقی

۷) $y=\sqrt{x^۲+x}-\sqrt{x^۲-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|x+\dfrac{۱}{۲}\right|-\left|x-\dfrac{۱}{۲}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{۱}{۲}-x+\dfrac{۱}{۲}\right)=۱$

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left|x+\dfrac{۱}{۲}\right|-\left|x-\dfrac{۱}{۲}\right|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\dfrac{۱}{۲}+x-\dfrac{۱}{۲}\right)=-۱$

بنابراین خطوط $x=۱$, $x=-۱$ مجانب های افقی تابع هستند.



۸) $y=Arc\cot x$

$y=\lim\limits_{x\to+\infty} Arc\cot x=۰$, $y=\lim\limits_{x\to-\infty} Arc\cot x=\pi$ دو مجانب افقی دارد

☑تست۱ : معادله خط مجانب نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۴-۲x}{\sqrt{x^۲-۲x}}$ وقتی $x<۰$ کدام است؟

۱) $y=-۲$ ۲) $y=-۱$ ۳) $y=۱$ ۴) $y=۲$

پاسخ: گزینه ۴

$$y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۱}{x}+\frac{۴-۲x}{-x+۱}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x}{-x}=۲$$

یادآوری: $\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^۲+bx+c}=\left|x+\frac{b}{۲}\right| \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^۲-۲x}=|x-۱|=-(x-۱)$

☑تست۲: مجانبهای نمودار $y=\frac{۲x-۱}{x+}$ خط به معادله $y=x+۳$ را دردو نقطه A و B قطع می کند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینه ۴

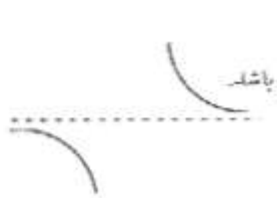
مخرج: مجانب قائم $=۰ \to x=-۳ \to A\begin{vmatrix}x=-۳\\ y=-۳+=۰\end{vmatrix}$

مجانب افقی: $y=\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{x}=۲ \to y=۲ \to B\begin{vmatrix}y=x+۳ \to ۲=x+۳ \to x=-۱\\ y=۲\end{vmatrix}$

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}=\sqrt{(-۳+۱)^۲+(۲-۰)^۲}=۲\sqrt{۲}$$

مثال۹: نمودار $y=\frac{۲x-۱}{x-۱}$ را در نزدیکی مجانب افقی آن رسم کنید.

اگر $x\to+\infty$ مقدار y بیشتر از ۲ و اگر $x\to-\infty$ برود مقادیر y کمتر از ۲ است،پس نمودار به صورت مقابل می باشد.



مجانب مایل

خط $y=ax+b$ یا $y=mx+h$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)$ است هر گاه حد زیر وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ برابر با صفرباشد یعنی:

$$\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)-(ax+b)|=۰$$

شرط لازم برای وجود مجانب مایل این است که حد تابع وقتی $x\to\infty$ برابر ∞ شود یعنی $\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$ وشرط کافی اینست که a و b (یا m و h) اعداد معین شوند.

اگر تابع دارای مجانب مایل به معادله $y=ax+b$ یا $y=mx+h$ باشد ضرایب m و h از روابط زیربدست می آیند:

شیب مجانب مایل $m=a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$

عرض از مبداء مجانب مایل $h=b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$

توجه: مجانب مایل در توابع کسری که درجه صورت یک واحد بیشتر از مخرج است همچنین در برخی توابع اصم، توابع معکوس مثلثاتی و ... وجود دارد.

مثال: معادله مجانب مایل توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

۱) $f(x)=\frac{x^۲+۴x+۵}{x-۱}$

روش اول:

مجانب مایل $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$

$$\begin{cases}m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^۲+۴x+۵}{x-۱}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲+۴x+۵}{x^۲-x}=۱\\ h=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}(y-۱x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^۲+۴x+۵}{x-۱}-x\right)=\infty-\infty \text{ مبهم}\end{cases}$$

$$h=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}+4x+5-x^{2}+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+5}{x-14}=\frac{5x}{5}=5\to\begin{cases}m=1=a\\h=5=b\end{cases}\to y=mx+h\to y=x+5$$

روش دوم:

نکته: برای پیدا کردن مجانب مایل در توابع کسری که درجه صورت یک واحد بیشتر از مخرج است می توان صورت را بر مخرج تقسیم کرد

$\boxed{\text{خارج قسمت}=y}$ معادله خط مجانب مایل است. (به شرطی که باقیمانده صفر نشود)

$$\begin{array}{r|l} x^{2}+4x+5 & x-1\\ \hline -\;x^{2}+x & x+5\\ \hline 5x+5 & \\ -5x+5 & \\ \hline 10 & \end{array}\quad\Rightarrow y=x+5$$

۲) $f(x)=\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}$

روش اول

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{\frac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^{2}}{|x|}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{2}}{x|x|}\to\begin{cases}m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}}{x^{2}}=1\\m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{2}}{-x^{2}}=-1\end{cases}$$

معادله مجانبهای مایل

$$\begin{cases}m=1\to\lim\limits_{x\to+\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}-x\right)=0\Rightarrow y=x\\m=-1\to h=\lim\limits_{x\to-\infty}(y-mx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^{2}}{\sqrt{x^{2}-1}}+x\right)=0\Rightarrow y=-x\end{cases}$$

روش دوم:

$$y=\frac{x^{2}}{|x|}=\frac{x^{2}}{\pm x}\to\begin{cases}y=\dfrac{x^{2}}{x}\Rightarrow y=x\\y=\dfrac{x^{2}}{-x}\Rightarrow y=-x\end{cases}$$

۳) $y=\dfrac{x^{3}+3x^{2}+4x+2}{x^{2}-5x+6}$

برای پیدا کردن معادله مجانب مایل کافیست صورت را بر مخرج تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^{3}+3x^{2}+4x+2 & x^{2}-5x+6\\ \hline -x^{3}+5x^{2}-6x & x+8\\ \hline 8x^{2}-2x+2 & \end{array}$$

پس $y=x+8$ معادله خط مجانب مایل منحنی است.

نکته: برای پیدا کردن مجانب مایل در توابع اصم می توان از هم ارزی استفاده کرد.

۴) $y=\sqrt{x^{2}+6x}+\sqrt{x^{2}-2x}$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(|x+3|+|x-1|\right)\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty: y=x+3+x-1\Rightarrow y=2x+2\\ x\to-\infty: y=-x-3-x+1\Rightarrow y=-2x-2\end{cases}$$

پس منحنی دو مجانب مایل دارد.

۵) $y=\sqrt[3]{x^3+6x^2+x+1}+x$

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3+6x^2+x+1}+x\xrightarrow{\text{هم ارزی}}y=x+2+x=2x+2$$

۶) $y=\sqrt{-x^2+8x-15}\qquad D_f=[3,5]$

باتوجه به اینکه $D_f=[3\,,\,5]$ یعنی دامنه محدود است پس x نمی تواند به بی نهایت میل کند و تابع فاقد مجانب افقی و مایل است .

۷- کلیه خطوط مجانب $y=\sqrt{x^2-4x+1}-x+7$ رابیابید.

$$y=\sqrt{x^2-4x+1}-x+7\to\begin{cases}x\to+\infty: y=x-2-x+7\Rightarrow y=5 \text{ مجانب افقی}\\ x\to-\infty: y=-x+2-x+7\Rightarrow y=-2x+9 \text{ مجانب مایل}\end{cases}$$

تابع مجانب قائم ندارد.

۸- مجانب مایل $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ را بیابید.

روش اول:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=1$$

$$h=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)\xrightarrow{\text{ضرب وتقسیم در مزدوج}}\lim_{x\to\infty}x\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}=$$

$$\lim_{x\to\infty}x\frac{x-1-x-1}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to\infty}x\frac{-2}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to\infty}-\frac{2x}{2x}=-1\Rightarrow y=x-1$$

روش دوم:

$$y=\sqrt{x^2\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x^3-x^2}{x+1}}=\sqrt{x^2-2x+\dots}\cong x-1$$

☑**تست ۱:** شیب مجانب مایل منحنی $y=2x\sqrt{\dfrac{x-5}{x+5}}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۳

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to\infty}2\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}=2\sqrt{1}=2$$

☑**تست۲:** ضریب زاویه (شیب) خط مجانب مایل $y=x\left(5^{-x}+3\right)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۳

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(5^{-x}+3\right)}{x}=5^{-\infty}+3=0+3=3$$

۱۱- کلیه خطوط مجانب $f(x)=\dfrac{x|x|+5}{x-2}$ را بیابید.

مخرج: مجانب قائم $=0\to x=2\to\lim_{x\to2}f(x)=\infty$ ق ق

چون درجه صورت یک واحد بیشتر از مخرج است منحنی مجانب افقی ندارد ومجانب مایل دارد که برای پیدا کردن آن کافیست صورت را بر مخرج تقسیم کنیم

$$x \to +\infty : y = \frac{x^{۲}+۵}{x-۲}$$

$$\begin{array}{r|l} x^{۲}+۵ & x-۲ \\ \hline -\ x^{۲}+۲x & x+۲ \\ \hline ۲x+۵ & \end{array}$$

$$x \to -\infty : y = \frac{-x^{۲}+۵}{x-۲}$$

$$\begin{array}{r|l} -x^{۲}+۵ & x-۲ \\ \hline +x^{۲}-۲x & -x-۲ \\ \hline -۲x+۵ & \end{array}$$

پس منحنی دو مجانب مایل به معادلات $y = x+۲$ و $y = -x-۲$ دارد.

نکته: در توابع به شکل $y = mx + h + \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ باشد آنگاه خط $y = mx + h + L$ مجانب مایل منحنی است.

تست۳: معادله خط مجانب مایل $y = ۳x + ۵ + \frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۲}+۴x+۶}$ کدام است؟

۱) $y = ۳x+۵$ ۲) $y = ۳x+۶$ ۳) $y = ۳x+۲$ ۴) $y = ۳x+۷$

پاسخ: گزینه ۲

$$y = ۳x+۵+\lim_{x\to\infty}\frac{x^{۲}-x+۱}{x^{۲}+۴x+۶} \Rightarrow ۳x+۵+۱ \Rightarrow y = ۳x+۶ \quad \text{مجانب مایل}$$

تست۴: معادله مجانب مایل $y = x + \frac{۴}{\pi}Arc\cos\frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) $y = x+۴$ ۲) $y = x-۴$ ۳) $y = x-۲$ ۴) $y = x+۲$

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to\infty}\frac{۴}{\pi}Arc\cos\frac{۱}{x} = \frac{۴}{\pi}Arc\cos ۰ = \frac{۴}{\pi}\times\frac{\pi}{۲} = ۲ \Rightarrow y = x+۲$$

تست۵: به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y + x = a$ مجانب مایل منحنی به معادله $y = \sqrt{\frac{x^{۳}+x^{۲}}{x-۲}}$ است؟

۱) $\frac{-۳}{۲}$ ۲) $\frac{-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۱

$$y = \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^{۳}+x^{۲}}{x-۲}} = \sqrt{x^{۲}+۳x+۶+\frac{۱۲}{x-۲}} \cong \left|x+\frac{۳}{۲}\right| \to \begin{cases} x\to+\infty : y = x+\frac{۳}{۲} \\ x\to-\infty : y = -x-\frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow y = -x+a = -x-\frac{۳}{۲} \Rightarrow a = \frac{-۳}{۲}$$

توضیح: صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم.به صورت $\frac{x^{۳}+x^{۲}}{x-۲} = x^{۲}+۳x+۶+\frac{۱۲}{x-۲}$ خواهد شد.حال حد $\frac{۱۲}{x-۲}$ وقتی $x\to\infty$ صفراست.
پس هم ارز $x^{۲}+۳x+۶$ را وقتی $x\to\infty$ بدست می آوریم.